

CAPÍTULO 6: Conclusiones

INTRODUCCIÓN.

Esta memoria de investigación responde a la preocupación de la investigadora por indagar acerca de la información que ofrecen los libros de texto de matemáticas a los alumnos, y cómo ésta ha ido variando a lo largo de la historia de la enseñanza del Análisis Matemático. Aunque en el marco teórico se ha hecho referencia a la línea de investigación correspondiente a Pensamiento Matemático Avanzado, y a pesar de los numerosos estudios que se vienen haciendo en este campo de la Didáctica de la Matemática, este trabajo aporta líneas novedosas de investigación, por cuanto:

- Ninguna de las investigaciones había abordado los conceptos relativos a los puntos críticos.
- No se había hecho ningún estudio histórico acerca de la enseñanza del Análisis Matemático, ni siquiera en sus orígenes.
- No se había evaluado el material curricular que se pone a disposición de los alumnos en la educación secundaria.
- No se habían analizado las diferentes opciones y cambios que plantea el uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.

Estas han sido las razones que nos han llevado a interesarnos en el estudio de los libros de texto, y en particular en la enseñanza de los puntos críticos. El análisis de los libros de texto nos muestra la diversidad de la interpretación dada a los programas y cuestionarios, tanto en su redacción, como en la organización del saber a transmitir y en la finalidad de las actividades a realizar. Dicho análisis debe tener en cuenta dos dimensiones opuestas pero propias de los libros de texto: una dimensión objetiva relacionada con la función del libro de texto como trasmisor del saber establecido y en particular de una forma de representar los conceptos matemático, y una dimensión subjetiva, relacionada con el

papel del autor como comunicador de un saber y el del alumno como receptor de un saber que ha de interpretar.

Hemos partido de la noción de representación, así como de la clasificación realizada por Janvier (1987) sobre los sistemas simbólicos de representación utilizados en el Análisis Matemático. Partiendo de las premisas establecidas por este autor, todo aprendizaje relativo a las funciones no se ha de limitar a una sola forma de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir de una representación a otra. Hemos comprobado que cada una de las cuatro formas de representar una función, ha tenido una génesis distinta, una aplicación diferente en el Análisis Matemático, y por lo tanto era necesario un estudio histórico de los métodos y procedimientos que están relacionados con ellas, para poder usarlas de una forma coherente en el aula.

Inicialmente hemos llevado a cabo una selección de las fuentes, tanto en relación con los que hemos denominado libros históricos de texto, como en torno a los libros de texto usados en la educación secundaria, para lo que, hemos utilizado conclusiones y reflexiones de investigaciones anteriores. En cuanto a los libros históricos de texto, nos han servido para poder describir la evolución en la presentación de los conceptos relativos a los puntos críticos, así como las diferentes concepciones que influyeron en la utilización de una de estas concepciones y que ha sido descrito en el capítulo 3.

Seguidamente indagamos acerca del momento en que se introdujeron los conceptos de Análisis Matemático en la enseñanza secundaria en España, de forma que hemos dividido en cuatro etapas dicha enseñanza, correspondientes en general, a sucesivos planes de estudio que imponían una cierta concepción de las Matemáticas y de su enseñanza. Para poder llevar a cabo un análisis lo más exhaustivo posible acerca de la forma de presentación de los puntos críticos en estos libros de texto, hemos elaborado un instrumento de análisis en el que, a partir de ciertas categorías y dimensiones, podemos establecer un perfil que caracteriza cada uno de los libros. El hecho de establecer este instrumento de análisis nos ha hecho reflexionar acerca de las características que poseen cada uno de los sistemas simbólicos de representación y su presencia de una forma u otra en los libros de texto. Para cada uno de los libros analizados, hemos establecido su perfil, que nos ha permitido asignarles un determinado carácter: expositivo, tecnológico o comprensivo.

Hemos utilizado las nuevas herramientas surgidas a partir de los avances tecnológicos llevados a cabo en los últimos años, a pesar de que su implantación en las aulas es reducida, pero consideramos necesario este estudio, para poder comparar con las otras opciones existentes en el momento, de forma que se pueda llevar a cabo una elección del enfoque que se quiere dar a la enseñanza de los conceptos de una forma crítica y razonada. La introducción de la calculadora gráfica y en general de las nuevas tecnologías, permite disponer de máquinas que automatizan, facilitan y simplifican muchas de las traducciones entre las representaciones funcionales, y permiten, por lo tanto, dirigir más la enseñanza hacia la comprensión de los conceptos que hacia la adquisición de automatismos de cálculo.

Finalmente, hemos desarrollado las conclusiones de cada una de estas etapas. En los próximos apartados, resumimos los resultados de la investigación desde el punto de vista de los logros de objetivos, de la confirmación de las hipótesis enunciadas, así como de las limitaciones del trabajo y de las implicaciones para futuras investigaciones.

6.1.- CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

En este apartado analizaremos en qué medida han sido alcanzados los objetivos que nos habíamos planteado al iniciar este trabajo.

Objetivo 1: Identificar y caracterizar los diferentes sistemas simbólicos de representación en el campo del Análisis Matemático, distinguiendo sus componentes sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales.

En el capítulo 1, apartados 1.5.6, 1.5.7, 1.5.8, 1.5.9 han sido descritos cada uno de los sistemas simbólicos de representación que se han considerado a lo largo de este trabajo de investigación. Para cada uno de los cuatro sistemas: verbal, tabular, gráfico y simbólico, se ha realizado una revisión de los trabajos relativos a alguno de ellos, indicando tanto las distintas formas en que han sido considerados en dichos trabajos, como la forma en que han sido considerados a lo largo de la realización de esta investigación. Se han descrito igualmente las componentes sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales que poseen y que permiten diferenciar unos sistemas de otros. Se han clasificado en diferentes tipos dentro de cada uno de los sistemas de representación, definiendo cada uno de ellos en el apartado 2.4.3.4, aunque dicha clasificación se refiere exclusivamente a aquellas representaciones que se han utilizado en relación con el concepto de punto crítico, es posible, que si se consideran en relación con todos los conceptos del Análisis Matemático, aparezcan otros tipos de representaciones. Finalmente se han establecido las dimensiones que permiten asignar un determinado carácter a la forma de presentación de cada uno de los tipos considerados en cuanto a su presencia en los libros de texto. En resumen, el proceso de caracterización de los sistemas simbólicos de representación se ha llevado a cabo mediante la revisión de trabajos previos, su descripción, su clasificación dentro de cada sistema, y el establecimiento de categorías para llevar a cabo un análisis adecuado.

En consecuencia consideramos que el primer objetivo ha sido conseguido en cuanto que hemos descrito, identificado y caracterizado cada uno de los sistemas simbólicos de representación del Análisis Matemático en las categorías sintáctica, semántica, socio-cultural y pragmático-didáctica.

Objetivo 2: Desarrollar un modelo de análisis de libros de texto que sirva para caracterizar el tipo de representaciones que utilizan.

Este modelo se ha desarrollado en el apartado 2.4.3 del capítulo 2, de forma que se han abarcado no sólo los libros de texto utilizados en la enseñanza secundaria durante el siglo XX, sino que se ha establecido un modelo de análisis de los libros históricos de texto. El modelo de análisis se puede considerar dividido en tres niveles según el grado de profundidad y especificidad del análisis realizado. Así, en el primer nivel, el más general, se han elaborado **fichas de referencia** que permiten identificar de cada uno de los libros, en las que se incluyen el nombre del autor, el año de nacimiento y fallecimiento (en el caso de los libros históricos), el año, lugar y editorial tanto de la primera edición como de la edición consultada, y la localización del manual. En el segundo nivel, y para tener una visión amplia de cada una de las obras, se han considerado dos elementos como son la **contextualización e intencionalidad de autor** por un lado y la **caracterización de la estructura del material**. El primero de estos elementos nos ha situado en el momento histórico en el que se escribió y utilizó cada una de las obras, así como las influencias sociales que intervinieron en la presentación de los contenidos relativos al Análisis Matemático, y el segundo nos ha informado acerca de los contenidos que se consideraron en un determinado momento pertinentes, su secuenciación y algunas características físicas de su presentación. Por último en el tercer nivel, el más particular, nos hemos centrado en los **sistemas simbólicos de representación** utilizados específicamente en cada una de las obras, para lo que se han seleccionado unidades de información clasificadas en cada uno de los sistemas: verbal, tabular, gráfico o simbólico. Estas unidades han sido analizadas en torno a cuatro categorías: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural que creemos que son las que permiten caracterizar las expresiones utilizadas. Consideramos que este objetivo ha sido conseguido, por cuanto nos ha permitido caracterizar cada uno de los libros seleccionados, y que puede ser de utilidad para aplicar a otros libros, otros materiales y otros contenidos que queramos analizar.

Objetivo 3: Analizar los cambios producidos en dichos sistemas de representación desde su origen, estableciendo diferentes etapas en su evolución, buscando las causas (socio-culturales, epistemológicas y didácticas) de estos cambios y las consecuencias que se puedan derivar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los cambios producidos en los sistemas de representación han sido analizados en tres bloques distintos correspondientes a: los libros históricos de texto, los libros utilizados en la enseñanza secundaria en España y la incorporación de las nuevas tecnologías. En cuanto al primer grupo, se han especificado para cada uno de los libros analizados las

conclusiones relativas a los aspectos socio-culturales, epistemológicos y didácticos, y finalmente en el apartado 3.8 se han establecido las conclusiones generales en las que se han establecido diferentes apartado en relación con los sistemas simbólicos de representación. Así se ha visto que inicialmente se utilizaron de forma prioritaria las descripciones de tipo geométrico manteniendo el tipo de problemas que se intentaban resolver desde la época de los griegos, con lo que las representaciones gráficas utilizadas hacen énfasis más en la curva que en la función a la que representa. Así lo hemos observado en los libros de l'Hôpital y MacLaurin, que procuran continuar con los métodos y las concepciones de la matemática establecidas en la matemática griega. Posteriormente, se centró la atención en la representación simbólica de las funciones, de forma que se llevó a cabo una clasificación, tanto de las curvas como de los tipos de puntos críticos, en relación con las expresiones algebraicas de las funciones, tal fue el caso de la clasificación realizada a partir de Euler y continuada por Bézout y Bails, y Lagrange. Este cambio, estuvo determinado tanto por la importancia que se le va concediendo poco a poco dentro de la matemática al concepto de función, como en cuanto a la presentación de una determinada estructura y organización de los conceptos del Análisis Matemático en los libros de texto, para mantener una secuenciación coherente y repetitiva a lo largo de dicho texto, que permita la identificación y clasificación de cada uno de los conceptos. Posteriormente Lacroix realiza una aportación en la que intervienen, complementándose los aspectos gráficos y los algebraicos. Se puede suponer que la inclusión de estos dos aspectos tiene fines exclusivamente didácticos para facilitar la identificación de los conceptos por parte de los alumnos. Por ello, aunque inicialmente se ofrecía una visión de los conceptos relativos a los puntos críticos muy dinámica a través de la descripción geométrica de fenómenos matemáticos, posteriormente con la utilización casi exclusiva de las representaciones de tipo algebraico, se condujo al Análisis Matemático hacia una visión fundamentalmente estática en la que se manejaba el concepto de función como un objeto de estudio.

En cuanto al segundo grupo, formado por los libros de texto de educación secundaria en España a lo largo de más de sesenta años, que han sido abarcados en el apartado 4.5, se ha establecido el aumento progresivo que se ha producido en cada periodo respecto del periodo anterior del tipo de problemas ofrecidos para su estudio, pasando de la importancia concedida a los problemas relacionados con fenómenos pertenecientes a la Física a la consideración de problemas exclusivamente matemático, la incorporación posterior de problemas económicos y finalmente la inclusión de algunos aspectos de tipo gráfico. Hemos podido establecer además una primera clasificación de las definiciones de los puntos críticos en funcionales, reglas y definiciones gráficas, siendo las primeras las que casi exclusivamente caracterizan a los puntos de inflexión, mientras que la caracterización de los puntos extremos ha pasado en los diferentes periodos de unas a otras, de forma que, en general, en el primer periodo se identifican de forma gráfica, en el segundo de forma funcional, en el tercero a partir de una regla, y en el último se utilizan indistintamente la forma funcional y la regla. En cuanto a las gráficas, se han utilizado tanto en un papel de ayuda a la visualización de los conceptos como, fundamentalmente en el último de los periodos considerados, en cuanto a su papel de clasificación de los puntos críticos, pero utilizando una visión fundamentalmente estática. La utilización de las tablas ha sido muy escasa, siendo de apoyo a otro tipo de representaciones, y en cuanto a las expresiones

simbólicas, se han considerado casi exclusivamente las de tipo algebraico, siendo escasas las funciones no derivables en los puntos críticos, así como cualquier tipo de función en el que su representación gráfica sea un poco más complicada de lo habitual. Hemos de destacar además, la desaparición en estos libros de texto de los llamados puntos de retroceso, que habían tenido una presencia constante en los libros de texto histórico, y en la ausencia, en la definición de los puntos críticos, de la consideración de la posibilidad de tangente vertical. Esto contrasta con algunas investigaciones realizadas en relación con la posición de la tangente, en las que se consideran tanto los casos de puntos cuya tangente es horizontal como de aquéllos en los que es vertical.

En cuanto a las posibilidades relativas al uso de las nuevas tecnologías, la propia construcción que se hace de las gráficas y tablas, sugiere una visión dinámica del concepto de función ligado a la idea de variación, lo que está más en consonancia con el origen, construcción, desarrollo y aplicación de esta rama de las matemáticas. Además se han observado ciertos aspectos novedosos respecto de la utilización de los sistemas simbólicos de representación como la categoría concedida a las tablas funcionales que pasan a ser consideradas al mismo nivel que cualquier otro sistema de representación, la posibilidad de traducción entre diferentes sistemas de representación en ambos sentidos y en pantallas independientes, la importancia que adquiere el dominio de definición de la función, la posibilidad de concebir las gráficas de las funciones desde un punto de vista geométrico-dinámico (al igual que hacían los matemáticos clásicos) animando las construcciones realizadas, la posibilidad de obviar la expresión simbólica de la función, la consideración de la función desde un punto de vista local enfatizado por la herramienta que permite hacer zoom en la gráfica,... El uso de las nuevas tecnologías permite, además, el estudio de funciones que hasta ahora era impensable, por la dificultad asociada a su representación gráfica, de forma que se pueden estudiar funciones sencillas como las que aparecen normalmente en los libros de texto, pero también se pueden considerar funciones definidas por una serie de potencias, funciones trigonométricas más complicadas, funciones definidas en coordenadas tanto cartesianas, como polares o paramétricas, con lo que el abanico de funciones es realmente amplio. Incluso, se puede realizar el análisis de una función obtenida directamente a partir de un experimento o una situación real. La concepción de la gráfica de una función varía según su forma de utilización, de forma que puede percibirse desde puntos de vista diferentes: como pares ordenados de valores (punto de vista aritmético), como una traza formada por puntos “unidos” (visión gráfica-dinámica) o como lugar geométrico (visión geométrico-dinámica).

Resumiendo para cada uno de los sistemas, hemos de destacar:

- En cuanto al tipo de problemas presentados, primeramente se consideraban problemas de tipo general, en el que se establecía toda una familia de soluciones y que estaban relacionados con situaciones de tipo geométrico, posteriormente se pasó al establecimiento de una clasificación de situaciones de tipo algebraico en las que los puntos críticos se relacionaban con la estructura de las expresiones simbólicas, a partir de entonces se incluyeron de forma sucesiva problema de tipo físico, matemático, económico y finalmente gráfico.

- En cuanto a las definiciones se ha pasado de la consideración de los puntos desde un punto de vista gráfico asociado a una curva, a su definición, estableciendo una regla de cálculo para finalmente considerarlos a partir de un cierto valor de la función.
- En cuanto a las tablas, inicialmente no se utilizan como medio de representación, lo que es claro en los libros históricos de texto, pasan a utilizarse con un papel intermedio en la representación gráfica de funciones en los libros de educación secundaria en España y, finalmente, mediante la utilización de las nuevas tecnologías adquieren un papel similar a cualquier otro tipo de representación, de tal forma que, mediante sucesivos afinamientos se puede llegar a obtener una idea bastante exacta del comportamiento de una función en el entorno de un punto, y resulta un método muy sencillo y exacto para el cálculo de los puntos críticos.
- En cuanto a las gráficas, se ha pasado desde su consideración como un lugar geométrico, es decir, estaría relacionada con la traza que describen unos puntos y la consideración dinámica de las curvas, a un papel exclusivo de visualización de los conceptos, o de apoyo para la resolución de problemas mediante la utilización de ideogramas, o la clasificación de los puntos críticos y su consideración de los puntos de la curva como pares ordenados de números, con lo que se obtiene una visión estática, y finalmente, mediante la utilización de calculadoras gráficas y ordenadores se puede tener una visión más global y dinámica, ya que se pueden utilizar cualquiera de estas formas gráficas de representación anteriormente citadas.
- En cuanto a las expresiones simbólicas, se ha pasado de la consideración de curvas definidas como lugares geométricos y cuya expresión simbólica se obtiene a partir de identidades de tipo geométrico, hasta la consideración de funciones casi exclusivamente algebraico y, finalmente, la utilización de funciones en el sentido más amplio, desde las más sencillas, hasta la utilización de diferentes tipos de sistemas de coordenadas o, por ejemplo, la consideración de funciones de tipo analítico definidas mediante una serie o las asociadas directamente a fenómenos físicos observables.

Dado que nuestro objetivo no es sólo identificar los diferentes periodos sino las posibles implicaciones en cuanto a la enseñanza, hemos de destacar que el tipo de enseñanza que caracteriza la utilización de los libros históricos es meramente expositiva, mientras que la utilización de los libros de texto de educación secundaria está relacionada más con la realización y solución de ejercicios, la mayoría de los cuales se resuelven de una forma rutinaria y mecánica, estando los problemas “preparados” en función del proceso de su solución, por ello, el perfil de la mayoría de los libros es de tipo tecnológico, y finalmente la utilización de las nuevas tecnología incide más en la comprensión de los conceptos y en las diferentes posibilidades de aplicación de dichos conceptos.

En consecuencia, consideramos que se ha cubierto este objetivo ya que se han establecido diferentes periodos en cuanto a la forma de presentación de los sistemas simbólicos de representación, desde el primer libro que se escribió relativo a la enseñanza del Análisis Matemático, haciendo énfasis, en particular, en relación con el concepto de punto crítico.

Objetivo 4: Describir cada uno de los libros analizados en función de los sistemas simbólicos de representación utilizados.

Al establecer diferentes categorías en relación con los sistemas de representación simbólica, y para cada una de ellas, de dimensiones relativas a: el enunciado del problema, las descripciones teóricas, los símbolos utilizados en las tablas, los tipos de expresiones simbólicas, la fenomenología, los tipos de descripciones, los tipos de tablas, los tipos de gráficas, los tipos de expresiones simbólicas, la función de los ejercicios, el papel de las definiciones, las actividades relacionadas con las tablas, la actividades gráficas, el papel de las expresiones simbólicas, la influencia social y la adaptación al currículo, las influencias didácticas, la aplicación de las tablas, la presentación de las gráficas y la complejidad de las expresiones simbólicas; hemos construido una herramienta que permite describir cada uno de los libros analizados, estableciendo un perfil de cada uno de ellos y pudiendo clasificarlos en torno a tres tipos de caracteres: expositivo, tecnológico o comprensivo.

En consecuencia, consideramos que se han establecido perfiles de cada uno de los libros analizados, que permiten describirlos en función de los sistemas simbólicos utilizados y que permiten además clasificarlos en uno de tres caracteres posibles, con lo que se ha cubierto el objetivo 4.

6.2.- LIMITACIONES DEL TRABAJO.

Señalamos las siguientes limitaciones del trabajo:

- Entre el proyecto de tesis y la presente memoria han quedado objetivos y algunas preguntas de investigación sin abordar, debido a que hemos tenido la necesidad de delimitar el proyecto inicial después de realizar un primer análisis de los libros de texto seleccionados.
- A continuación enunciamos algunos asuntos indicados en el proyecto de tesis que han quedado descartados en este estudio:
 - No hemos podido abarcar todo el campo conceptual del Análisis Matemático, ni siquiera el correspondiente a la derivada, por cuanto la información que íbamos obteniendo de cada uno de los libros era muy amplia y difícil de sistematizar al intentar abarcar un campo de trabajo tan amplio. De hecho, penamos que cada uno de los libros históricos de texto, podrían dar lugar a una tesis.
 - Tampoco hemos podido describir las relaciones entre diferentes sistemas de representación, y los procesos de traducción que se realizan habitualmente entre ellos. Aunque inicialmente, comenzamos a realizar este estudio, dada la magnitud de los datos que nos hemos encontrado no han podido ser incluidos en esta memoria.

Este estudio podría dar lugar igualmente a otra tesis que estudie exclusivamente estos procesos de traducción.

- Otra limitación ha estado relacionada con el material publicado en relación con la introducción de las nuevas metodologías en el aula. Ya hemos dicho en el capítulo anterior, que dado que este tipo de recursos son relativamente novedosos, el material que hemos encontrado ha sido muy escaso, quedando reducido a artículos en revistas especializadas, libros de didáctica de la matemática y manuales de utilización de calculadoras y software elaborado con fines didácticos.
- Más que una limitación, ha sido una dificultad añadida el trabajar con libros escritos en idiomas diferentes, no sólo por la problemática concerniente al conocimiento del idioma, sino por la estructura sintáctica que diferencia a unos de otros, fundamentalmente en relación con el latín. Por ello, hemos tenido que hacer abstracción de las estructuras exclusivamente de tipo lingüístico, para centrarnos en los aspectos matemáticos.

6.3.- HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN. RESULTADOS

En este apartado analizaremos las hipótesis de investigación establecidas a la luz de los resultados obtenidos en los diferentes estudios que componen la investigación:

Hipótesis 1: Cada uno de los sistemas simbólicos de representación poseen características sintácticas, semánticas, didáctico-pragmáticas y socio-culturales muy variadas y que están relacionadas con diferentes concepciones de la enseñanza de las matemáticas.

Hemos establecido en el apartado 2.4.3.5, una relación de las características sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales que poseen cada uno de los sistemas simbólicos de representación considerados, en relación con el concepto de punto crítico. Esta relación se ha realizado estableciendo diferentes dimensiones, y para cada una de ellas se han especificado tres orientaciones distintas, según el carácter de la representación analizada, considerando tres tipos de caracteres: expositivo, tecnológico y comprensivo, correspondiente a tres concepciones diferentes relativas a la enseñanza de las matemáticas. Utilizando estas características, hemos determinado que la mayoría de los libros que se utilizan en la enseñanza del Análisis Matemático en la educación secundaria, pone el énfasis en la práctica de las reglas y procesos de cálculos, siendo muy escasas las representaciones que inciden en los aspectos relativos a la comprensión de los conceptos. Podemos afirmar que se ha confirmado la primera hipótesis en el estudio desarrollado.

Hipótesis 2: Las descripciones verbales de los fenómenos relacionados con los puntos críticos en los libros históricos de texto, en las que se enfatiza claramente un pensamiento geométrico, favorecen la representación de estos conceptos desde un punto de vista dinámico que enfatiza la noción de variación asociada a las funciones.

Se ha constatado, sobre todo en los libros de l'Hôpital y MacLaurin, apartados 3.1 y 3.2, cómo se describían las curvas considerándolas como lugares geométricos que cumplen unas determinadas condiciones, incluso en las definiciones está presente este carácter dinámico “llamamos cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen constantemente”, y en las expresiones que se utilizan en las descripciones “la abscisa crece continuamente ...” Además el libro de MacLaurin al utilizar la noción de fluxión para desarrollar el Cálculo tiene un carácter fuertemente dinámico, ya que se supone que las magnitudes que son objeto de estudio están dotadas de un movimiento que determina su variación en relación con el tiempo, con lo que son muy frecuentes las menciones que se hacen al momento en el que se está considerando la variable. Los términos que se utilizan en las definiciones también contribuyen a dotarlas de este carácter dinámico: crece, después, se hace, se desvanece,... Estos libros han permitido confirmar la hipótesis segunda que habíamos supuesto en nuestro proyecto de tesis.

Hipótesis 3: Las representaciones descriptivas y las gráficas cartesianas predominantes en los libros de texto de educación secundaria en España son representaciones de tipo estático, las cuáles tanto por sus características como el soporte utilizado, el papel, hace que se ofrezca una visión de los conceptos del Análisis Matemático como algo fijo, intemporal y no relacionado con la idea de variación.

Tanto los fenómenos utilizados para aplicar los conceptos relativos a los puntos críticos, como las definiciones utilizadas para describirlos y caracterizarlos, hacen referencia a una visión global de dicho fenómeno o de la característica que permite distinguirlos, siendo escasas las unidades de información que hemos estudiado en las que se justifica la pertinencia del problema asociándola a una variación que hace que en una determinada situación exista un punto extremo (como se ha hecho en el libro del Grupo Cero, o en el artículo de Kaput de 1993 que se ha descrito en la página 317). Las definiciones en las que se establece que un punto crítico es aquel en el que la derivada es cero, o que un punto extremo es aquel en el que la tangente es horizontal, no inducen a la consideración de una situación dinámica en la que van variando los valores, sino que se ve de una forma global, como si fuera un todo. Igualmente las representaciones gráficas utilizadas cuyas funciones principales son la visualización de los conceptos y su clasificación, también inciden en este aspecto global que posee la gráfica sin que se establezca una asociación con la propia construcción de la curva, con la variación de los

valores o con la relación que se puede establecer mediante la comparación del comportamiento de la función en un entorno del punto. Hemos visto al establecer el perfil de los libros cómo han sido tanto estas descripciones como estas gráficas las mayoritarias en las representaciones utilizadas, de modo que de forma general se puede afirmar que en los libros de texto de secundaria los tipos de representaciones que se utilizan ayudan a forjar una idea del Análisis Matemático como estudio de una situación estática.

Hipótesis 4: La introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Cálculo Diferencial recupera el sentido dinámico con el que están relacionados los puntos críticos.

Hemos visto cómo los materiales didácticos que se pueden utilizar con las nuevas tecnologías buscan precisamente recuperar el carácter dinámico que es la esencia del Cálculo Diferencial. Este dinamismo se pone de manifiesto mediante la utilización conjunta de diferentes sistemas de representación, el análisis y la interpretación de cada uno de estos sistemas, utilizando para ello herramientas que ponen a nuestra disposición estos medios tecnológicos, como es el caso del zoom, de la definición de la ventana (dominio de definición), la utilización de la traza para recorrer una curva o el estudio de la variación de la pendiente. Además mediante la utilización del programa de geometría dinámica CABRI, las construcciones de las curvas permite visualizar este sentido de variación, y la interactividad de la construcción realizada, permite observar como la modificación de los datos influye en la forma de la gráfica. Esto confirma la hipótesis 4.

Hipótesis 5: Existen distintos periodos de la enseñanza del Análisis Matemático caracterizados por la utilización de ciertos tipos de representación en los libros de texto, y por el énfasis puesto en algunas características de esas representaciones frente a otras.

La utilización que hacen los libros de texto de los diferentes sistemas simbólicos de representación, así como el papel que realizan estas representaciones a lo largo del texto, nos permiten caracterizar diferentes periodos en la enseñanza del Análisis Matemático, de modo que hemos de considerar que el tipo de enseñanza que caracteriza la utilización de los libros históricos es meramente expositiva tanto de los conceptos que se describen como de las técnicas que se utilizan, en este caso en relación con el cálculo de los puntos máximos y mínimos, mientras que en los libros de texto de educación secundaria las representaciones están más encaminadas hacia la realización y solución de ejercicios, la mayoría de los cuales se resuelven de una forma rutinaria y mecánica, estando los problemas “preparados” en función del proceso de su solución, por ello, el perfil de la mayoría de los libros es de tipo tecnológico. Hay que hacer notar de todas formas que algunos libros se desmarcan de

este modelo de enseñanza, principalmente el libro del Grupo Cero, y puntualmente otros libros como el de Anaya88 o el de SM correspondiente al último de los planes considerados (L.O.G.S.E.). Finalmente la utilización de las nuevas tecnología incide más en la comprensión de los conceptos y en las diferentes posibilidades de aplicación de dichos conceptos, aportando numerosas novedades respecto de la utilización de los libros de texto como la incorporación al estudio de los puntos críticos de numerosas funciones no consideradas hasta ese momento.

Hipótesis 6: Dentro de cada periodo los libros de texto no se adaptan por igual a las orientaciones establecidas en los programas oficiales y la utilización de unos sistemas de representación frente a otros, permite clasificar los libros de texto.

Hemos visto que las orientaciones establecidas en los programas oficiales no son siempre las que establecen el modelo de enseñanza. Salvo algunos libros como los textos piloto correspondientes al segundo periodo considerado, (apartado 4.2) relativo a la inclusión de la matemática moderna, que se adaptaron a los programas, orientaciones y cuestionario más fielmente, en el resto de los libros se producen ligerísimas modificaciones respecto de los libros del periodo anterior, no sólo en cuanto a la forma de presentación de los conceptos, sino en cuanto a la organización, a la concepción que se tiene de su enseñanza, a cuestiones de tipo metodológico, etc. A pesar de ello, algunos libros se desmarcan de las líneas generales que poseen los demás libros del periodo, resultando incluso mucho más novedosos que los libros pertenecientes al siguiente periodo. Esto es lo que ha ocurrido con el libro del Grupo Cero, y en menor medida con el libro de Anaya88 respecto de los libros escritos bajo la L.O.G.S.E. De todas formas hemos de tener en cuenta que la línea editorial marca considerablemente los libros que publica de forma que son las editoriales más que los programas oficiales los que determinan la forma de enseñanza. Por ello las representaciones que se utilizan en los libros de texto nos permiten hacer una clasificación, que aunque inicialmente se ha realizado en tres grupos, se deben considerar diferentes matices en cada uno de estos grupos, en el sentido de que un libro no pertenece exclusivamente a uno de ellos, sino que puede tener al mismo tiempo componentes de cada uno de los tres. Podemos, por ello hablar de un carácter dominante, pero siempre teniendo en cuenta que este carácter no es determinante, sino que habrá diferentes orientaciones en las expresiones utilizadas.

6.4.- IMPLICACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.

El presente trabajo de investigación ha permitido avanzar afirmaciones relacionadas con la presentación de los puntos críticos tanto en los libros de texto como a través de los nuevos medios tecnológicos. El estudio realizado ha abierto nuevas perspectivas en cuanto al análisis de libros de texto, y a las aportaciones de las calculadoras y ordenadores. A continuación indicamos algunas posibles líneas para trabajos futuros:

Cuestiones planteadas en el proyecto de tesis no investigadas en esta memoria.

- Estudio de las representaciones utilizadas en relación con otros conceptos del Análisis Matemático: el concepto de número real, el de función, la derivada o la integral, pueden ser diferentes conceptos a los que aplicar un análisis similar al que se ha hecho en este estudio.
- Una vez que las nuevas tecnologías estén más implantadas en el sistema de enseñanza, sería necesario que se publicaran materiales para su uso, que deberían tener en cuenta algunas de las conclusiones a las que se ha llegado a lo largo de esta investigación, y que deberían ser evaluados por profesionales.
- La importancia que tiene la relación entre los diferentes sistemas de representación, así como la traducción entre estos diferentes sistemas debería ser uno de los objetos de estudio prioritarios, dado que como hemos dicho en el primer capítulo de esta memoria que la comprensión de los conceptos pertenecientes al Pensamiento Matemático Avanzado y el establecimiento de una completa red de relaciones entre los diferentes conceptos y procesos involucrados, son esenciales tanto en relación con el llamado crecimiento horizontal, como con el vertical.

Como consecuencia de los hallazgos en esta investigación.

- Diseño de material didáctico que permita la utilización en el aula de matemáticas para abordar adecuadamente los temas relativos a los puntos críticos.
- Aplicación de los instrumentos elaborados a otras muestras de libros y otros temas relativos tanto al Cálculo Diferencial, como a otros campos conceptuales relativos al Pensamiento Matemático Avanzado.
- Resultaría adecuado indagar con profesores en ejercicio acerca de cómo utilizan el libro de texto en el aula, el papel que cumplen las distintas representaciones en el aprendizaje del concepto de punto crítico, y como intentan solventar el carácter eminentemente estático de algunas de ellas.
- Las diferentes versiones que hemos encontrado en cuanto a la definición de los puntos críticos, sugiere hacer un estudio más afinado de tipo epistemológico y metodológico.

Nuevas cuestiones.

- Estudio de la influencia de los libros de texto en la adquisición de los conceptos relativos al Análisis Matemático.
- Uso que se hace en el contexto escolar tanto por parte de los profesores, como por parte de los alumnos, de los diferentes tipos de sistemas simbólicos de representación.
- Adecuación de cada una de las representaciones, tanto desde el punto de vista expresivo como del contenido matemático al nivel del alumnos y cómo se produce el aprendizaje

en la utilización de las mismas, lo que equivale al dominio de un campo de problemas y de las técnicas de elaboración de datos, vía estas representaciones.

- Evaluación de los libros escolares mediante las características tanto del lenguaje como de las representaciones que están presentes en ellos.

Como reflexión final, el trabajo que se presenta en esta memoria, nos ha permitido entresacar algunas de las características de la enseñanza de los puntos críticos en la educación secundaria, establecer sus limitaciones y avanzar posibles alternativas en cuanto a la planificación de su enseñanza. Hemos visto cuál ha sido la evolución de esta enseñanza desde el primer libro de texto que se escribió en relación con el Análisis Matemático y como se ha enfocado la enseñanza de los conceptos relativos a los puntos críticos a pesar de las modificaciones en los sucesivos planes de estudio. Esto nos ha permitido realizar una revisión histórica acerca de la noción de puntos críticos y de los sistemas simbólicos que se han utilizado para representarlos. Hemos visto los diferentes problemas que han ido surgiendo en los periodos correspondientes a la enseñanza del Análisis Matemático, así como otras formas de representación, fundamentalmente definiciones y representaciones gráficas y simbólicas.

Esperamos que nuestro trabajo haya contribuido a caracterizar, delimitar, analizar y clarificar una parte del campo conceptual del Pensamiento Matemático Avanzado, y en particular lo referente a los puntos críticos.